量子統計力学で用いる $\zeta(2)$ と $\zeta(4)$ の導出

ボース・アインシュタイン凝縮をはじめ、量子統計力学理解に欠かせない特殊関数であるツェータ（ゼータ）関数は、引数が偶数の場合、近似ではなく正確な値（ただし無理数）がわかっている。ここでは、小林昭七『なっとくするオイラーとフェルマー』（講談社）に拠りながら、2と4の場合の値を導出する[1]。

まず、双曲線関数

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

を

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

であることを用いて、

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]$$

と表す。

次に、

$$P_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]$$

を因数分解する。

$$P_n(x) = 0$$

の解 a は、

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1-\frac{a}{n}\right)^n$$

より、

$$\left(1+\frac{a}{n}\right) = \omega\left(1-\frac{a}{n}\right)$$

[1] 6以上も同様の導出が可能。前掲書を参照。

2012/1/19 ABS 福井義高

を満たさねばならない。ω は 1 の n 乗（複素）根

$$\omega^n = 1$$

であり、解 a は

$$a = n\frac{\omega - 1}{\omega + 1}$$

と表せる。

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

より、

$$e^{0i} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0 = 1$$

かつ

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + 0 = 1$$

で、一周すれば元に戻り、n 個の 1 の n 乗根は

$$\omega = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

となる。n 乗すれば、確かに

$$\omega^n = e^{2k\pi i} = 1$$

となっている。したがって、

$$\frac{\omega - 1}{\omega + 1} = \frac{e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1}{e^{\frac{2k\pi i}{n}} + 1} = \frac{e^{\frac{k\pi i}{n}} - e^{\frac{-k\pi i}{n}}}{e^{\frac{k\pi i}{n}} + e^{\frac{-k\pi i}{n}}} = \frac{i\sin\frac{k\pi}{n}}{\cos\frac{k\pi}{n}} = i\tan\frac{k\pi}{n}$$

と変形できるので、n 個の解

$$a_k = n\frac{\omega - 1}{\omega + 1} = ni\tan\frac{k\pi}{n}$$

を得る。

　ここで、n を奇数と仮定し、$k=0$（$\omega=1$）すなわち $a_0=0$ を除く解を

$$k_+ = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$$

$$k_- = \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1$$

に二等分する。周期性より、

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{2\pi i - \left(2\pi i - \frac{2k\pi i}{n}\right)} = e^{2\pi i} \cdot e^{\frac{-2(n-k)\pi i}{n}} = e^{\frac{-2(n-k)\pi i}{n}}$$

なので、

$$e^{\frac{2\cdot 1\pi i}{n}}=e^{\frac{-2(n-1)\pi i}{n}},$$

$$\vdots$$

$$e^{\frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi i}{n}}=e^{\frac{-2\left(n-\frac{n-1}{2}\right)\pi i}{n}}=e^{\frac{-2\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi i}{n}},$$

$$e^{\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi i}{n}}=e^{\frac{-2\left(n-\frac{n+1}{2}\right)\pi i}{n}}=e^{\frac{-2\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi i}{n}},$$

$$\vdots$$

$$e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}=e^{\frac{-2[n-(n-1)]\pi i}{n}}=e^{\frac{-2\cdot 1\pi i}{n}}$$

となるため

$$p=\frac{n-1}{2}$$

と置けば、n 個の解を

$$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm p$$

で指定することができる。したがって、

$$P_n(x)=D(x-a_0)(x-a_1)(x-a_{-1})\cdots(x-a_p)(x-a_{-p})$$

となる。

$$a_0=0,\ a_k\neq 0\ (k\neq 0)$$

なので、

$$P_n(x)=Cx\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_{-1}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_p}\right)\left(1-\frac{x}{a_{-p}}\right)$$

と変形すれば、

$$P_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\left[(1+x+\ldots)-(1-x+\ldots)\right]$$
$$=x+\ldots$$

より、$C=1$ であることがわかり、

$$P_n(x)=x\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_{-1}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_p}\right)\left(1-\frac{x}{a_{-p}}\right)$$

を得る。

さらに、

$$\left(1-\frac{x}{a_k}\right)\left(1-\frac{x}{a_{-k}}\right)=\left(1-\frac{x}{ni\tan\frac{k\pi}{n}}\right)\left(1-\frac{x}{ni\tan\frac{-k\pi}{n}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{x}{ni\tan\frac{k\pi}{n}}\right)\left(1+\frac{x}{ni\tan\frac{k\pi}{n}}\right)$$
$$=1+\frac{x^2}{n^2\tan^2\frac{k\pi}{n}}$$

であることを用いれば、

$$P_n(x)=x\prod_{k=1}^{p}\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2\frac{k\pi}{n}}\right)$$

とまとめることができる。ロピタルの定理を用いれば、

$$\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{k\pi}{n}=k\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{k\pi}{n}}{\frac{k\pi}{n}}=k\pi\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}=k\pi\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 y}}{1}=k\pi$$

であることがわかるので、双曲線関数は

$$\sinh x=\lim_{n\to\infty}P_n(x)=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$
$$=x\left[\left(1+\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\right]$$
$$=x\left[\begin{array}{l}1+\left(\frac{x^2}{1^2\pi^2}+\frac{x^2}{2^2\pi^2}+\frac{x^2}{3^2\pi^2}+\ldots\right)\\+\left(\frac{x^4}{1^2\cdot 2^2\pi^4}+\frac{x^4}{1^2\cdot 3^2\pi^4}+\ldots+\frac{x^4}{2^2\cdot 3^2\pi^4}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2\pi^4}+\ldots\right)+\ldots\end{array}\right]$$
$$=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{x^4}{\pi^4}\sum_{k<l}^{\infty}\frac{1}{k^2l^2}+\ldots\right)$$

と表すことができる。

一方、双曲線関数をテイラー展開すれば、

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) \\ -\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)\end{array}\right]$$

$$= x + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$= x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots\right)$$

となる。

結局、

$$\boxed{\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{x^4}{\pi^4}\sum_{k<l}^{\infty}\frac{1}{k^2 l^2} + \ldots\right) = x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots\right)}$$

なので、係数を比較すれば、

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{\pi^4}\sum_{k<l}^{\infty}\frac{1}{k^2 l^2},$$

$$\vdots$$

でなければならない。まず、

$$\boxed{\zeta(2) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

は明らか。さらに、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^2 - 2\times\sum_{k<l}^{\infty}\frac{1}{k^2 l^2}$$

の関係を用いれば、

$$\boxed{\zeta(4) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \left(\frac{\pi^2}{3!}\right)^2 - 2\left(\frac{\pi^4}{5!}\right) = \frac{\pi^2}{90}}$$

であることがわかる。