

量子統計力学で用いるツェータ関数とアップセル関数の初等的解説

ボース・アインシュタイン凝縮をはじめ、量子統計力学理解に欠かせない特殊関数であるツェータ（ゼータ）関数とアップセル（多重対数）関数について、わかりやすい初等的証明（のようなもの）が見つけれなかったもので、浅学を顧みず、以下のようにまとめてみた¹。

まず、ガンマ関数

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$$

を $x = nt$ で変数変換して、

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-nt} (nt)^{z-1} ndt \\ &= n^z \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{z-1} dt\end{aligned}$$

と変形し、

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^z} &= \int_0^{\infty} e^{-nt} (nt)^{z-1} ndt \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{z-1} dt\end{aligned}$$

を得る。したがって、ツェータ関数

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

は、

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \right] t^{z-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} (e^{-t} + e^{-2t} + \cdots) t^{z-1} dt\end{aligned}$$

と表現でき、

$$(e^{-t} + e^{-2t} + \cdots)(e^t - 1) = 1$$

であることを用いると、

$$\boxed{\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt}$$

と積分形で表せる。

今度は、

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nt} t^{z-1} dt$$

¹ なお、学部入門レベルの量子統計力学では、最後の箇所を除き、下記の導出が有効な変数の範囲が問題になることはないと思うので、いちいち明記していない。

の無限級数和を求める。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nt} \right] t^{z-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} (e^{-t} - e^{-2t} + \dots) t^{z-1} dt\end{aligned}$$

なので、

$$(e^{-t} - e^{-2t} + \dots)(e^t + 1) = 1$$

であることを用いると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt$$

を得る。さらに、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^z} \cdot \frac{1}{n^z} \right] = \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \dots$$

より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^z} \cdot \frac{1}{n^z} \right] = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots$$

なので、

$$(1 - 2^{1-z}) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt$$

の関係があることがわかる。つまり、ツェータ関数は

$$\boxed{\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{(1 - 2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt}$$

とも表せる。

最後に、アッペル関数

$$\phi(z, s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n^z}$$

は、

$$\frac{s^n}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} s^n e^{-nt} t^{z-1} dt = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^t}{s} \right)^{-n} t^{z-1} dt$$

より、

$$\begin{aligned}\phi(z, s) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{s} \right)^{-n} \right] t^{z-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{e^t}{s} \right)^{-1} + \left(\frac{e^t}{s} \right)^{-2} + \dots \right] t^{z-1} dt\end{aligned}$$

と表現できるので、

$$\left[\left(\frac{e^t}{s} \right)^{-1} + \left(\frac{e^t}{s} \right)^{-2} + \cdots \right] \left(\frac{e^t}{s} - 1 \right) = 1$$

であることを用いると、

$$\phi(z, s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{\frac{e^t}{s} - 1} dt$$

すなわち、

$$\boxed{\phi(z, s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{st^{z-1}}{e^t - s} dt}$$

を得る。

なお、 $z > 1$ の場合、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(z, s)}{\partial s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ns^{n-1}}{n^z} = \frac{1}{1} + \frac{2s}{2^z} + \frac{3s^2}{3^z} + \cdots \\ &= \frac{1}{1^{z-1}} + \frac{s}{2^{z-1}} + \frac{s^2}{3^{z-1}} + \cdots \end{aligned}$$

なので、

$$s \times \frac{\partial \phi(z, s)}{\partial s} = \frac{s}{1^{z-1}} + \frac{s^2}{2^{z-1}} + \frac{s^3}{3^{z-1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n^{z-1}}$$

すなわち、

$$\boxed{\frac{\partial \phi(z, s)}{\partial s} = \frac{\phi(z-1, s)}{s}}$$

の関係がある。